



附录

答案及解析



第1章 集合与常用逻辑用语

第1节 集合的概念及其运算



题型上分练

1. A 【解析】依题意可得 $B = \{-3, 0, 3\}$, 所以 $-3 \in B, 0 \in B, 3 \in B, 1 \notin B$. 故选 A.

2. C 【解析】已知集合 $A = \{1, 2\}, B = \{3, 6\}$, 若 $x \in A, y \in B$, 则 xy 可能为 $1 \times 3 = 3, 1 \times 6 = 6, 2 \times 3 = 6, 2 \times 6 = 12$, 所以 $C = \{3, 6, 12\}$, 故集合 C 中的元素个数为 3. 故选 C.

3. ACD 【解析】当 $n = 0$ 时, $m + \sqrt{5}n = m - \sqrt{5}n$, 则 $A \cap B \neq \emptyset$, A 正确.

设 $a = m_1 + \sqrt{5}n_1, b = m_2 - \sqrt{5}n_2, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}, n_1, n_2 \in \mathbf{N}$,

则 $a + b = m_1 + m_2 - \sqrt{5}(n_2 - n_1), m_1 + m_2 \in \mathbf{Z}, n_2 - n_1$ 未必属于 $\mathbf{N}$,

$ab = m_1m_2 - 5n_1n_2 + \sqrt{5}(m_2n_1 - m_1n_2)$, 因为 $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}, n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, 所以 $m_1m_2 - 5n_1n_2 \in \mathbf{Z}, m_2n_1 - m_1n_2 \in \mathbf{Z}$, 所以 $ab \in (A \cup B)$,

B 错误, D 正确.

设 $a = m_3 + \sqrt{5}n_3, b = m_4 + \sqrt{5}n_4, m_3, m_4 \in \mathbf{Z}, n_3, n_4 \in \mathbf{N}$, 则 $a + b = m_3 + m_4 + \sqrt{5}(n_3 + n_4), m_3 + m_4 \in \mathbf{Z}, n_3 + n_4 \in \mathbf{N}$, C 正确.

故选 ACD.

4. C 【解析】解不等式 $x^2 - 2x - 8 \leq 0$, 得 $-2 \leq x \leq 4$, 又 $x \in \mathbf{N}$, 所以 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 共 5 个元素, 所以集合 A 的非空真子集的个数为 $2^5 - 2 = 30$, 故选 C.

5. BD 【解析】由 Venn 图可知, $B \subsetneq A$ 且 $B \subsetneq U$, 结合选项可知集合 B 可能是 $\{1, 3\}$ 或 $\{2, 3\}$. 故选 BD.

6. A 【解析】因为全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}, 2 \in B$, 且 $B \subseteq U$ (提示: 2 一定在集合 B 中, 1, 3, 4 可能在也可能不在), 所以 B 可能为 $\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$, 故满足条件的集合 B 的个数为 8.

7. B 【解析】 $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$ 等价于 $\begin{cases} (x-2)(x+1) \leq 0, \\ x+1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < x \leq 2$,

所以 $A = \left\{ x \mid \frac{x-2}{x+1} \leq 0 \right\} = (-1, 2]$.

又 $B = [-1, 2]$, 所以 $A \subsetneq B$. 故 ACD 错误, B 正确.

8. C 【解析】 $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \{1, 3\}, B = \{x \mid -x^2 + 6x + 7 \geq 0, x \in \mathbf{N}\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 7, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

由 $A \subseteq C \subseteq B$, 可得 $\{1, 3\} \subseteq C \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 由于每个符合条件的集合 C 都包含元素 1, 3, 所以集合 C 的个数即为集合 $\{0, 2, 4, 5, 6, 7\}$ 的子集的个数, 故集合 C 的个数为 $2^6 = 64$. 故选 C.

9. B 【解析】当 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$, 即 k 为偶数时, $x = 3k + 1 = 3 \times 2n + 1 = 6n + 1, n \in \mathbf{Z}$,



当 $k=2n+1, n \in \mathbf{Z}$, 即 k 为奇数时, $x=3k+1=3 \times (2n+1)+1=6n+4, n \in \mathbf{Z}$,

所以集合 A 中的元素为除以 6 余 1 的整数和除以 6 余 4 的整数.

因为 $B=\{x|x=6m+1, m \in \mathbf{Z}\}$, 所以集合 B 中的元素为除以 6 余 1 的整数,

所以 $B \subseteq A, A \not\subseteq B, A \cap B \neq \emptyset$, 故 **B 正确, A 错误, C 错误;**

由 $B \subseteq A$ 得 $A \cup B = A$, 故 $A \cup B$ 中的元素为除以 6 余 1 的整数和除以 6 余 4 的整数, 并不是全体整数, 故 **D 错误.**

故选 B.

快解 观察集合 A, B 的形式可知, 集合 A 中的元素可构成一个公差为 3 的无穷等差数列, 集合 B 中的元素可构成一个公差为 6 的无穷等差数列, 并且它们有公共项, 故 $B \subseteq A$.

10. A 【解析】由题意得 $\complement_U A = \{0, 4, 5\}$, 所以 $(\complement_U A) \cap B = \{5\}$, 故选 A.

11. A 【解析】由题意得 $\complement_U A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 且全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则集合 $A = \{5, 6\}$.

12. B 【解析】由集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$, 则 $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

13. C 【解析】由 $1 - \ln x \geq 0$, 得 $0 < x \leq e$, 即 $M = (0, e]$, 所以 $\complement_U M = (-\infty, 0] \cup (e, +\infty)$. 故选 C.

14. B 【解析】因为 $M = \{x|x=4k+1, k \in \mathbf{Z}\} = \{x|x=2 \cdot 2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$, 其中 $2k$ 为偶数,

$N = \{x|x=4k+3, k \in \mathbf{Z}\} = \{x|x=2(2k+1)+1, k \in \mathbf{Z}\}$, 其中 $2k+1$ 为奇数,

所以 $M \cup N = \{x|x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$, 即 $M \cup N$ 为所有奇数组成的集合, 所以 $\complement_U (M \cup N)$ 为所有偶数组成的集合.

对于 A, 集合 $\{x|x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$ 表示所有奇数组成的集合;

对于 B, 集合 $\{x|x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$ 表示所有偶数组成的集合;

对于 C, 集合 $\{x|x=4k+2, k \in \mathbf{Z}\}$ 表示所有被 4 除余 2 的数组成的集合;

对于 D, 集合 $\{x|x=4k, k \in \mathbf{Z}\}$ 表示 4 的整数倍对应的数组成的集合. 故选 B.

15. B 【解析】当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $y=x^2 \geq 0$, 即 $A = \{x|x \geq 0\}$, 则 $\complement_U A = \{x|x < 0\}$, 又 $B = \{x|-1 < x < 1\}$, 故 $\{x|-1 < x < 0\} = (\complement_U A) \cap B$. 故选 B.

16. B 【解析】根据 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, 可得 $(x-3)(x+1) \geq 0$, 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$, 则 $A = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. 根据 $\ln x \geq \frac{1}{2}$, 可

关键点

得 $\ln x \geq \ln e^{\frac{1}{2}}$, 解得 $x \geq \sqrt{e}$, 则 $B = [\sqrt{e}, +\infty)$.

故 $A \cup B = (-\infty, -1] \cup [\sqrt{e}, +\infty)$. 故选 B.

17. D 【解析】因为 $f(x) = 2^x + x$ 是增函数, 且 $f(2) = 6 < 10$, $f(3) = 11 > 10$,

所以满足 $2^x + x > 10$ 的最小整数为 3, 所以 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$.

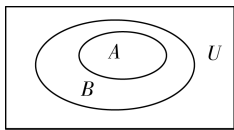
故选 D.

一题多解 当 $x=1$ 时, $2^x + x = 2+1 < 10$; 当 $x=2$ 时, $2^x + x = 4+2 < 10$; 当 $x=3$ 时, $2^x + x = 8+3 > 10$; 当 $x=4$ 时, $2^x + x = 16+4 > 10$; 当 $x=5$ 时, $2^x + x = 32+5 > 10$. 所以 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$.



- 18. B** 【解析】题图中的阴影部分为 A 与 B 的并集中去掉 A 与 B 的交集的部分. 因为 $B = \{0, 1, 2\}$, 所以 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$, $A \cap B = \{0, 1\}$, 所以题图中阴影部分表示的集合为 $\{-1, 2\}$. 故选 B.

- 19. C** 【解析】如图所示, $A \cup B = B$, $A \cup (\complement_U B) \neq U$, $B \cup (\complement_U A) = U$, $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U A \neq U$, 故选 C.



- 20. A** 【解析】集合 A 表示直线 $y=x$ 上所有的点, 集合 B 表示圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上所有的点, 故集合 $A \cap B$ 表示直线 $y=x$ 与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的公共点. 圆心 $(0, 1)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{|0-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, 所以直线 $y=x$ 和圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 相交, 有 2 个公共点, 故选 A.

- 21. B** 【解析】由 $A \cup B = B$ 得 $A \subseteq B$.

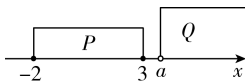
当 $a=0$ 时, $B = \{x | x^2 - ax = 0\} = \{0\}$, 不符合题意.

当 $a \neq 0$ 时, $B = \{x | x^2 - ax = 0\} = \{0, a\}$, 要使 $A \subseteq B$, 则 $a = -1$. 综上, $a = -1$.

- 22. D** 【解析】因为 $A = \{x \in \mathbf{R} | x > a\}$, $3 \in A$ 且 $1 \notin A$, 所以 $1 \leq a < 3$, 故选 D.

易错警示 3 在集合 A 中, 1 不在集合 A 中, 需要注意参数 a 的取值范围中端点值能否取到.

- 23. C** 【解析】已知集合 $P = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $Q = \{x | x > a\}$, 因为 $P \cap Q = \emptyset$, 所以 $a \geq 3$ (注意: $a=3$ 时, 集合 Q 中不含 3, 集合 P 中含 3).



- 24. AB** 【解析】因为 $B \subseteq A$, 所以 $a^2 - 8 = -7$ 或 $-a^2 + a - 1 = -7$, 解得 $a=1$ 或 $a=-1$ 或 $a=-2$ 或 $a=3$.

当 $a=1$ 时, $A = \{-2, -7, -1\}$, $B = \{-7, 2\}$, 此时 $B \not\subseteq A$, 则 $a=1$ 不符合题意.

当 $a=-1$ 时, $A = \{-2, -7, -3\}$, $B = \{-7, -2\}$, 此时 $B \subseteq A$, 则 $a=-1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时, $A = \{-2, -4, -7\}$, $B = \{-7, -4\}$, 此时 $B \subseteq A$, 则 $a=-2$ 符合题意.

当 $a=3$ 时, $A = \{-2, 1, -7\}$, $B = \{-7, 6\}$, 此时 $B \not\subseteq A$, 则 $a=3$ 不符合题意. 故选 AB.

一题多解 直接将选项中的值代入检验. 当 $a=-2$ 时, $A = \{-2, -4, -7\}$, $B = \{-7, -4\}$, 满足 $B \subseteq A$, 故 A 正确; 当 $a=-1$ 时, $A = \{-2, -7, -3\}$, $B = \{-7, -2\}$, 满足 $B \subseteq A$, 故 B 正确; 当 $a=1$ 时, $A = \{-2, -7, -1\}$, $B = \{-7, 2\}$, 不满足 $B \subseteq A$, 故 C 错误; 当 $a=3$ 时, $A = \{-2, 1, -7\}$, $B = \{-7, 6\}$, 不满足 $B \subseteq A$, 故 D 错误.

- 25. A** 【解析】因为 $B \cap (\complement_{\mathbf{R}} A) = \emptyset$, 所以 $B \subseteq A$.

关键点

$B = \{x | 1-m \leq x \leq 1+m\}$, $A = \{x | -2 \leq x \leq 10\}$,



当 $B = \emptyset$ 时, 满足 $B \subseteq A$, 此时 $1-m > 1+m$, 解得 $m < 0$;

易错点

当 $B \neq \emptyset$ 时, 有 $\begin{cases} m \geq 0, \\ 1-m \geq -2, \text{解得 } 0 \leq m \leq 3. \\ 1+m \leq 10, \end{cases}$

综上, 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 3]$. 故选 A.

26. B 【解析】根据集合中元素的互异性可知, $a \neq 1, a \neq -2$.

因为 $A \cup B$ 中含有 4 个元素, 所以 $A \cap B$ 中仅含有 1 个元素,

关键点

若 $a^2 \in A$, 则 $a^2 = 1$ 或 $a^2 = a$, 所以 $a = 0$ 或 $a = \pm 1$.

若 $-1 \in A$, 则 $a = -1$.

结合集合中元素的互异性可知 $a = 0$ 或 $a = -1$.

当 $a = 0$ 时, $A = \{-2, 1, 0\}$, $B = \{-1, 0\}$, $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1\}$, 符合题意.

当 $a = -1$ 时, $A = \{-2, 1, -1\}$, $B = \{-1, 1\}$, $A \cup B = \{-2, -1, 1\}$, 不符合题意.

综上, $a = 0$.

27. A 【解析】因为 $a > 0$, 所以 $A = \{x | (x-a)(x+1) \leq 0\} = [-1, a]$.

根据 $tx = 6, t \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{N}$, 可得 t 是 6 的正因数.

当 $t = 1$ 时, $x = 6$; 当 $t = 2$ 时, $x = 3$; 当 $t = 3$ 时, $x = 2$; 当 $t = 6$ 时, $x = 1$, 所以 $B = \{1, 2, 3, 6\}$.

因为 $B \subseteq A$, 集合 B 中的最大元素为 6, 所以 $a \geq 6$, 故实数 a

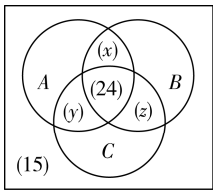
关键点

的取值范围是 $[6, +\infty)$.

28. B 【解析】根据题意, $60\% + 50\% - 100\% = 10\%$, $65\% + 55\% - 100\% = 20\%$, 则同时选择两项参加的人数在 10% 到 20% 之间, 换算成人数为 $1\ 200 \times 10\% = 120$, $1\ 200 \times 20\% = 240$, 即同时选择两项参加的人数在 120 到 240 之间, 因此符合题意的选项只有 B.

29. A 【解析】将参加舞蹈、唱歌、体育课外活动的小学生分别用集合 A, B, C 表示, 作出 Venn 图, 如图所示,

则 $\text{card}(A) = 63$, $\text{card}(B) = 89$, $\text{card}(C) = 47$, $\text{card}(A \cap B \cap C) = 24$.



设接受调查的小学生人数为 n , 只参加舞蹈和唱歌课外活动的小学生人数为 x , 只参加舞蹈和体育课外活动的小学生人数为 y , 只参加唱歌和体育课外活动的小学生人数为 z ,

则 $\text{card}(A \cap B) = 24 + x$, $\text{card}(A \cap C) = 24 + y$, $\text{card}(B \cap C) = 24 + z$, $x + y + z = 46$.

由三个集合的容斥原理得 $n - 15 = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) = 63 + 89 + 47 - (24 + x) - (24 + y) - (24 + z) + 24 = 151 - (x + y + z) = 105$, 解得 $n = 120$,

故接受调查的小学生共有 120 人. 故选 A.

30. A 【解析】 A 是 S 的一个子集, 奇数 - 奇数 = 偶数, 偶数 - 偶数 = 偶数, 奇数 - 偶数 = 奇数, 偶数 - 奇数 = 奇数. 若对任意 $a_i, a_j \in A (a_i \neq a_j)$, 总有 $|a_i - a_j| \notin A$, 要使 A 中元素的个数最



多,则集合 A 中取所有的奇数即可,即 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 则集合 A 中元素个数的最大值为 5. 故选 A.

31. 14 【解析】因为 $A = \{i, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, -1+i, i, 1+i, -1-i, -i, 1-i\}$, 所以 $A \oplus B = \{-1+i, i, 1+i, -1+2i, 2i, 1+2i, -1, 0, 1, 2, 2+i, -i, 1-i, 2-i\}$, 共 14 个元素.

真题风向练

32. C 【命题点】诱导公式, 集合的交集运算

【解析】 $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 所以集合 $A = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, 所以 $A \cap B = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$. 故选 C.

第2节 充分条件与必要条件 全称量词与存在量词



题型上分练

1. B 【解析】 $a//b \Leftrightarrow x(x-4) - 1 \cdot (x-6) = 0$, 即 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$, 所以“ $x = 2$ ”是“ $a//b$ ”的充分不必要条件, 故选 B.

2. C 【解析】不等式 $4x + \frac{1}{x-1} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 12x + 9}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)^2}{x-1} \geq 0$, 解得 $x > 1$, 所以“ $x > 1$ ”是“ $4x + \frac{1}{x-1} \geq 8$ ”的充要条件. 故选 C.

3. A 【解析】因为 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = a$ 有实数解, $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-2, 2]$, 所以 $-2 \leq a \leq 2$. 因为 $p: 0 < a < 1$, $q: -2 \leq a \leq 2$, 所以由 p 可以推出 q , 由 q 不可以推出 p , 所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

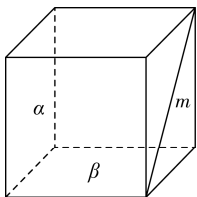
4. D 【解析】取 $a = e^{-1}$, $b = e^{-2}$, 则 $a > b$, 但此时 $2 \ln a = -2$, $\frac{1}{2} \ln b = -1$, $2 \ln a < \frac{1}{2} \ln b$, 所以“ $a > b$ ”不是“ $2 \ln a > \frac{1}{2} \ln b$ ”的充分条件.

取 $a = e^2$, $b = e^3$, 则 $2 \ln a = 2 \ln e^2 = 4$, $\frac{1}{2} \ln b = \frac{1}{2} \ln e^3 = \frac{3}{2}$,

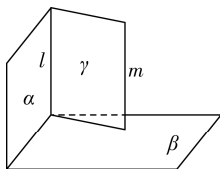
$2 \ln a > \frac{1}{2} \ln b$, 但此时 $a < b$, 所以“ $a > b$ ”不是“ $2 \ln a > \frac{1}{2} \ln b$ ”的必要条件.

故“ $a > b$ ”是“ $2 \ln a > \frac{1}{2} \ln b$ ”的既不充分也不必要条件.

5. B 【解析】如图①所示的正方体中, $m // \alpha$, $\alpha \perp \beta$, 但此时 $m \perp \beta$ 不成立, 即不满足充分性;



图①



图②



当 $m \parallel \alpha, m \perp \beta$ 时,如图②所示,可过 m 作平面 γ 交平面 α 于 l ,则 $m \parallel l$,所以 $l \perp$ 平面 β ,由面面垂直的判定定理可知 $\alpha \perp \beta$,满足必要性.

故“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $m \perp \beta$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

6. A 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,由 $a_m + a_n = a_p + a_q$,可得 $2a_1 + (m+n-2)d = 2a_1 + (p+q-2)d$, $\therefore (m+n-2)d = (p+q-2)d$, $\therefore m+n=p+q$ 或 $d=0$, $\therefore$ “ $m+n=p+q$ ”不是“ $a_m + a_n = a_p + a_q$ ”的必要条件;若 $m+n=p+q$,则一定有 $a_m + a_n = a_p + a_q$, $\therefore$ “ $m+n=p+q$ ”是“ $a_m + a_n = a_p + a_q$ ”的充分条件. 所以“ $m+n=p+q$ ”是“ $a_m + a_n = a_p + a_q$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

7. C 【解析】因为 p 是 q 的必要不充分条件,所以 $B \subsetneq A$.

当 $a=0$ 时, $B=\emptyset$,符合题意;

当 $a>0$ 时, $B=\left\{x \mid x \leq -\frac{1}{a}\right\}$,

因为 $B \subsetneq A$,所以 $\begin{cases} a>0, \\ -\frac{1}{a}<-1, \end{cases}$ 解得 $0<a<1$;

当 $a<0$ 时, $B=\left\{x \mid x \geq -\frac{1}{a}\right\}$,

因为 $B \subsetneq A$,所以 $\begin{cases} a<0, \\ -\frac{1}{a} \geq 3, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3} \leq a<0$.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right)$. 故选 C.

8. B 【解析】若 $f(x) = -x^2 + |x-a| + a+1$ 为偶函数,则 $f(-x) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,即 $-(-x)^2 + |-x-a| + a+1 = -x^2 + |x-a| + a+1$,所以 $|x+a| = |x-a|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,故 $a=0$.

若 $a=0$,则 $f(x) = -x^2 + |x| + 1$,所以 $f(-x) = -(-x)^2 + |-x| + 1 = f(x)$,故 $f(x)$ 为偶函数.

所以 $f(x)$ 为偶函数的充要条件为 $a=0$. 故选 B.

9. $[0, 1]$ 【解析】由 $|x|<1$,可得 $-1<x<1$. 由 $ax^2 + (a-1)x - 1 < 0$ ($a \geq 0$),可得 $(ax-1)(x+1) < 0$ (提示:二次项系数含参,需要对 a 进行分类讨论).

当 $a=0$ 时,解得 $x>-1$,符合题意;

当 $a>0$ 时,解得 $-1<x<\frac{1}{a}$,

若 p 是 q 的充分条件,则 $\{x \mid -1<x<1\} \subseteq \left\{x \mid -1<x<\frac{1}{a}\right\}$,

所以 $\frac{1}{a} \geq 1$,即 $0<a \leq 1$.

综上, a 的取值范围是 $[0, 1]$.

10. B 【解析】“改量词”: $\forall x \in \mathbf{R} \rightarrow \exists x \in \mathbf{R}$;“否结论”: $\frac{1}{2}x^2 - \sin x > 0 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - \sin x \leq 0$.

11. B 【解析】根据题意可知,选项 A, D 为全称量词命题,选项 B, C 为存在量词命题.

当 $x = \sqrt[3]{3} \notin \mathbf{Q}$ 时, $x^3 = 3 \in \mathbf{Q}$,选项 B 为真命题. 当 $x>1$ 时, $\sqrt{x}>1$,选项 C 为假命题. 故选 B.

12. A 【解析】若命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + a \leq 0$ ”为真命题,则 $4 -$



$4a \geq 0$, 解得 $a \leq 1$.

快解 看到“ $\exists$ ”即不等式至少有一个解, 观察选项端点值只有 0 和 1, 可采用特值法进行排除.

将 $a=1$ 代入不等式, 则 $x^2+2x+1 \leq 0$, 即 $(x+1)^2 \leq 0$, 当 $x=-1$ 时不等式成立, 故 1 符合, 选 A.

13. C 【解析】对于命题 $p, \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - (x-1) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, 则 $x^2 > x-1$, 故命题 p 为真命题;

对于命题 q , 由 $x^3 = -x$, 可得 $x^3 + x = x(x^2 + 1) = 0$, 解得 $x=0$, 命题 q 为假命题, 故命题 $\neg q$ 为真命题.

14. D 【解析】 $\forall x \in [1, 2], x^2 + ax + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -a \geq x + \frac{1}{x}$.

函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 当 $x=2$ 时, $y = x + \frac{1}{x}$ 取

得最大值, $y_{\max} = \frac{5}{2}$, 因此 $-a \geq \frac{5}{2}$, 解得 $a \leq -\frac{5}{2}$.

选项中只有 $\{a | a \leq -3\}$ 是 $\left\{a \mid a \leq -\frac{5}{2}\right\}$ 的真子集, 故选 D.

15. D 【解析】由题可知, 命题 p 的否定: $\forall x \in \mathbf{R}, m \cdot n \geq 0$, 且假命题的否定是真命题, 即“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 4ax + 2 \geq 0$ ”是真命题.

当 $a=0$ 时, $2 \geq 0$, 符合题意; 当 $a \neq 0$ 时, $a > 0$ 且 $16a^2 - 8a \leq 0$, 所以 $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. 故选 D.

真题风向练

16. A 命题点 ⊙ 充分、必要条件的判断

【解析】若存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ 对任意正整数 n 成立, 则必有 $a_n \leq b_n$ (提示: 不等式的传递性), 充分性成立; 反之, 设 $a_n = n, b_n = n+1$, 满足 $a_n \leq b_n$, 但不存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ 恒成立, 即必要性不成立, 因此“存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ”是“ $a_n \leq b_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ”的充分不必要条件, 故选 A.

第 1 章 ▶ 真题综合测试

1. C 命题点 ⊙ 集合的补集运算

【解析】由题知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 所以 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, 有 5 个元素.

2. D 命题点 ⊙ 集合的补集与并集运算

【解析】由题知 $\complement_U A = \{-2, 2\}$, 又 $B = \{-2, 0, 1\}$, 所以 $(\complement_U A) \cup B = \{-2, 2\} \cup \{-2, 0, 1\} = \{-2, 0, 1, 2\}$, 故选 D.

3. D 命题点 ⊙ 集合的交集运算

【解析】 $\because A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}, B = \{x | x^3 = x\} = \{-1, 0, 1\}$, $\therefore A \cap B = \{0, 1\}$. 故选 D.

快解 (排除法) $\because 2$ 不满足 $x^3 = x, \therefore 2 \notin B$, 故 $2 \notin (A \cap B)$, 排除 A, B, C. 故选 D.

4. A 命题点 ⊙ 集合的交集运算

【解析】由题意可知 $-1 \in B, (-1)^3 = -1 \in A, 0 \in B, 0^3 = 0 \in A$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0\}$. 故选 A.



一题多解 由题意知 $A = \{x | -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$, 又 $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = \{-1, 0\}$, 故选 A.

5. C 命题点 ①集合的并集运算

【解析】 因为集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}$, $N = \{x | -1 \leq x < 4\}$, 所以 $M \cup N = \{x | -3 < x < 4\}$. 故选 C.

6. C 命题点 ①一元二次不等式的解法及集合的交集运算

【解析】 由 $x^2 - x - 6 \geq 0$, 得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 3$, 则 $N = \{x | x \leq -2$ 或 $x \geq 3\}$. $\therefore M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\therefore M \cap N = \{-2\}$, 故选 C.

7. D 命题点 ①集合的交集、补集运算

【解析】 $\because A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $\therefore B = \{x | \sqrt{x} \in A\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$, $\therefore A \cap B = \{1, 4, 9\}$, $\therefore \complement_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$, 故选 D.

8. D 命题点 ①不等式的解法、集合的交集运算

【解析】 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\} = \{x | 0 \leq x < 16\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\} = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$, 所以 $M \cap N = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}$, 故选 D.

9. B 命题点 ①判断命题的真假

【解析】 对于命题 p , 当 $x = -1$ 时, $|x+1| = 0 < 1$, 所以 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题. 对于命题 q , 若 $x^3 = x$, 则 $x = -1, 0, 1$, 所以满足“ $\exists x > 0, x^3 = x$ ”, 故 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题, 故选 B.

10. A 命题点 ①一元二次不等式及充分必要条件的判断

【解析】 由 $x^2 - 3x > 0$, 解得 $x > 3$ 或 $x < 0$, 设集合 $P = \{x | x < 0\}$, 集合 $Q = \{x | x > 3$ 或 $x < 0\}$, 则 $x \in P \Rightarrow x \in Q$, 故充分性成立, 而 $x \in Q \not\Rightarrow x \in P$, 故必要性不成立. 所以“ $x < 0$ ”是“ $x^2 - 3x > 0$ ”的充分不必要条件, 故选 A.

11. A 命题点 ①集合的基本运算

【解析】 因为 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 所以 $M \cup N = \{x | x < 2\}$, $\complement_U M = \{x | x \geq 1\}$, $M \cap N = \{x | -1 < x < 1\}$, $\complement_U N = \{x | x \leq -1$ 或 $x \geq 2\}$, 所以 $\complement_U(M \cup N) = \{x | x \geq 2\}$, $N \cup \complement_U M = \{x | x > -1\}$, $\complement_U(M \cap N) = \{x | x \leq -1$ 或 $x \geq 1\}$, $M \cup \complement_U N = \{x | x < 1$ 或 $x \geq 2\}$, 故选 A.

12. A 命题点 ①充分、必要条件的判断

【解析】 充分性: 因为 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 所以对任意 $M \in \mathbf{R}$, 都存在 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$ 成立, 故充分性成立.

必要性: 令 $f(x) = x^2$, $x \in [-1, +\infty)$, 满足对任意 $M \in \mathbf{R}$, 都存在 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$ 成立, 但 $f(x)$ 的值域不是 $\mathbf{R}$, 故必要性不成立.

所以“ $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ”是“对任意 $M \in \mathbf{R}$, 存在 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

13. B 命题点 ①充分条件和必要条件的判断

【解析】 由 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, 得 $\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta$, 所以 $\sin \alpha = \cos \beta$ 或 $\sin \alpha = -\cos \beta$ (易错: 注意等式两边开方后会有两种情况), 充分性不成立. 由 $\sin \alpha + \cos \beta = 0$, 得 $\sin \alpha = -\cos \beta$, 即 $\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta$, 又 $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$, 所以 $\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta$, 即 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, 必要性成立. 所以“ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ”是“ $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ ”的必要不充分条件, 即甲是乙的必要条件但不是充分条件. 故选 B.